グラフの3-辺連結化について(計算アルゴリズムと計算量の基礎理論)

渡辺, 敏正; 中村, 昭; 成田, 貴則

数理解析研究所講究録
666巻 1988年 195-204

グラフの3－辺連結化について

広島大工学部　渡辺　敏正　(Toshimasa Watanabe)
広島大工学部　中村　昭　(Akira Nakamura)
広島大大学院　成田　貴則　(Takanori Narita)

あらまし

グラフに、ある性質を満たすように付加するコスト最小の辺集合を決定する問題は、辺付加問題と呼ばれ、既にいくつかの結果が知られている。
本論文では、連結グラフG_0に対して、辺のコストが異なるときに、(1)G_0を3－辺連結化する辺付加問題がNP－完全であることを示し、(2)2－辺連結化に関する従来の結果[6]を拡張し、3－辺連結化を行なう$O(|V|^2(|V|+|E|))$の近似解法を提案する。更に、近似解の評価として、(3)2－辺連結グラフに対する3－辺連結化のための近似解は、最適解のコストの2倍とグラフによって定まる部分木のコストとの和以下になることを示す。

1. まえがき

与えられたグラフに、ある性質を満たすために付加する最小コストの辺集合を決定する問題を辺付加問題といい、既に辺連結化、点連結化に関する辺付加問題について、次のような結果が知られている。

EswaranとTarjan[3]は、無向グラフの2－点連結化，2－辺連結化に関する辺付加問題や有向グラフの強連結化に関する辺付加問題について、各辺のコストがすべて等しいときには、$O(|V|+|E|)$の計算時間を持つ解法を示している。また、辺のコストが異なる場合には、NP－完全になることを証明している。ここで、$|V|$、$|E|$は、それぞれグラフの点数、辺数を表わす。渡辺と中村[23]は、無向グラフのk－点連結化に関する辺付加問題について、辺のコストがすべて等しいとき、k=3の場合には、$O(|V|(|V|+|E|)^2)$の計算時間を持つ解法を示し、辺のコストが異なる場合には、$k\geq 3$に対してNP－完全になることを示している。FrankとChou[5]は、辺のコストがすべて等しいときに、空グラフ(辺を持たないグラフ)に対して、最小辺集合の付加により、与えられた局所辺連結度(local edge-connectivity)をもつグラフを構成する問題が、多項式時間で解けることを示している。梶谷と上野[12]は、有向木に対する(有向グラフの意味での)k－辺連結化($k\geq 2$)に関する辺付加問題を考え、辺のコストがすべて等しいときに、$O(k|V|)$の計算時間をもつ解法を示している。増沢、萩原、都倉[17]は、有向木に対する(有向グラフの意味での)k－点連結化($k\geq 2$)に関する辺付加問題を考え、辺のコストがすべて等しいときに、計算時間$O(k|V|)$の解法を示している。渡辺と中村[29]は、辺のコストがすべて等しいときのk－辺連結化に関する辺付加問題に対して、最小辺数の付加

による$O(k^2|V|^4(k|V|+|E|))$の計算時間を有する解法を示している。これは、更に[32]において、$O(k^2|V|^3(k|V|+|E|))$と改良されている。また、FredericksonとJa'ja[6]は、無向グラフの２－点連結化や２－辺連結化、有向グラフの強連結化に関する辺付加問題について、与えられたグラフを連結グラフに制限しても、辺のコストが異なる場合には、ＮＰ－完全であることを証明し、更に最小コスト有向木を用いた$O(|V|^2)$の近似解法によって、最適解のコストの２倍以下のコストをもつ近似解を求めている。

一般に、ｋ－辺連結化に関する辺付加問題はｋ－辺連結化問題と呼ばれているが、**ｋ－辺連結化問題**(k-Edge Connectivity Augmentation Problem)とは、完全グラフG, コスト$c:E(G)\Rightarrow \mathbf{Z}^+$(非負整数の集合), Gの部分グラフG_0(但し、点集合$V(G_0)=V(G)$)が与えられているとき、G'(但し$V(G')=V(G)$かつ辺集合$E(G')=E(G_0)\cup E'$)がｋ－辺連結となる最小コスト辺集合$E'\subseteq E(G)-E(G_0)$を求める問題である。ここで、E'のコストは$c(E')=\Sigma_{e\in E'}c(e)$である。

本論文では、辺のコストが異なる場合の３－辺連結化問題を研究対象とする。すなわち、連結グラフG_0に対して、辺のコストが異なるときに、G_0の３－辺連結化問題がＮＰ－完全であることを示し、２－辺連結化近似解法[6]を拡張して、３－辺連結化問題の近似解法を提案する。更に、２－辺連結グラフに対する３－辺連結化のための近似解は、最適解のコストの２倍とグラフによって定まる部分木のコストとの和以下になることを示す。

以下、２章で諸定義を与え、３章では、G_0を連結グラフに制限した3-ECAがＮＰ－完全であることを示す。４章では、3-ECAの近似解法アルゴリズム(ATEC)について述べる。ATECは３つの手続きBRC、FTCおよびFSからなる。まず、G_0をFredericksonとJa'jaの２－辺連結化近似解法(BRC)[6]によって、２－辺連結化したグラフG'を構成する。次に、手続きFTCは、G'上の３－辺連結成分を求める。最後に手続きFSは、これを１点に縮約したグラフFにおいて、最小コストの有向木を求め、この有向木を無向化した辺集合において、グラフF上に含まれない辺を$V(G_0)$上の辺に変換して、近似解とする。５章では、得られる近似解の評価を行う。ここでは、最適解を部分集合として含む中間解を導入し、近似解と中間解のコストを比較するという手法を用いる。６章では、本論文のまとめと今後の課題について述べる。

２．諸定義

グラフ(graph)$G=(V(G),E(G))$は、有限な空でない点集合$V(G)$と、辺集合$E(G)$とからできている。ここで、辺は$V(G)$の２点(同一であってもよい)を結ぶものとする。この２点をその辺の端点と呼ぶ。グラフGにおいて、辺に向きがある(すなわち、２端点が始点、終点として区別されている)とき、Gを有向グラフ(directed graph)と呼び、そうでないときGを無向グラフ(undirected graph)という。

点uから点vへの有向枝を$\langle u,v\rangle$と、また、２点u,vを両端点とする無向辺を(u,v)と表す。以下簡単のため、有向枝(無向辺)を枝(辺)と呼ぶことにする。もし、$e=(u,v)$ ($e=\langle u,v\rangle$または$\langle v,u\rangle$)がグラフGの辺(枝)であれば、点uと点vは隣

接している(adjacent)といい、点uと辺(枝)e、または点vと辺(枝)eは接続している(incident)という。さらに、Gの２つの異なる辺(枝)e_1とe_2が共通の点に接続しているならば、辺(枝)e_1とe_2は隣接している(adjacent)という。２つの辺(枝)e_1, e_2がそれぞれ点u,vと接続しているとき、これらを多重辺(multiple edge)または多重枝(multiple arc)という。$e=(v,v)$($e=\langle v,v\rangle$)のとき、辺(枝)eを自己閉路(self-loop)という。グラフGが自己閉路、多重辺(多重枝)のいずれをも含まないとき、Gを単純グラフ(simple graph)という。

グラフGにおいて、点vの点次数$d_G(v)$を点vに接続している自己閉路以外の辺(枝)の総和によって定める。有向グラフGにおいて、点vを始点(終点)とする有向枝の本数を入次数$Id_G(v)$(出次数$Od_G(v)$)とする。点次数が0である点を特に孤立点(isolated vertex)という。

u,vをグラフGの(必ずしも異なるとは限らない)２点とする。Gにおいてuとvを両端点とする道(path)とは、点と辺または枝の交替列$u=v_0, e_1, v_1, \cdots v_{n-1}, e_n, v_n=v$で端点u,v以外の点(内点と呼ぶ)が相異なるもののことである。ここで$e_i, 1\leq i\leq n$,は、v_{i-1}とv_iを結ぶ辺または枝である。$e_i=(v_{i-1}, v_i)$ ($e_i=\langle v_{i-1}, v_i\rangle$), $1\leq i\leq n$,のとき、無向道(有向道)と呼び、また$e_i=(v_{i-1}, v_i)$または$e_i=\langle v_{i-1}, v_i\rangle$, $1\leq i\leq n$,のとき、弱連結道と呼ぶ。特に、これを(u,v)-道(有向道，弱連結道)と呼ぶこともある。道(有向道)の始点と終点とが同一の点であるとき、この道を閉路(cycle)(有向閉路(directed cycle))という。点vを含む閉路をC_vと表わすこともある。無向グラフGのどの２点u,vに対しても、(u,v)-道が存在するとき、Gは連結(connected)であるという。連結でないグラフは非連結(unconnected)であるという。有向グラフGにおいて枝の向きを考慮しないとき、連結であるグラフを弱連結(weakly connected)であるという。また、始点u、終点vとする有向道が存在するとき、vはuから到達可能であるといい、すべての点がある点rから到達可能であるとき、このrを根(root)という。Gの相異なるどの２点も、一方が他方から到達可能であるならば、Gは強連結(strongly connected)であるという。木とは、無閉路的連結無向グラフのことをいう。弱連結な有向グラフ$G=(V(G), E(G))$が$Id_G(v)=0$の根rを持ち、かつ$Id_G(v)=1$(但し、vはr以外の任意の点)のとき、Gは有向木(arborescence)とよばれる。

点部分集合$S\subseteq V(G)$に対して、Sによって誘導される(induced)Gの部分グラフとは、点集合Sをもち、かつSの2点に接続しているGの辺すべてからなる辺集合をもつグラフのことである。これを$G[S]=(V(G[S]), E(G[S]))$,(但し、$V(G[S])=S, E(G[S])=\{(u,v) \mid u,v\in S\}$)と表わす。このとき、G[S]をGの誘導部分グラフと呼ぶ。グラフ$G=(V(G), E(G))$から点集合$P\subseteq V(G)$(点$v\in V(G)$)とそれに接続する辺すべてを取り去ることを、点集合P(点v)の除去といい、$G-P$($G-v$)と表す。Gから辺集合$Q\subseteq E(G)$(辺$e\in E(G)$)を取り去ることを、辺集合Q(辺e)の開放除去(deletion)といい、$G-Q$($G-e$)と表す。Gから辺$e\in E$に接続する両端点を１つの点にまとめ、かつ辺eを開放除去することを、辺eの短絡除去(contraction)という。E'をV(G)の２点を結ぶ辺集合とする。$E'\cup E(G)=\phi$とする。このとき、$G+E'=(V(G), E(G)\cup E')$とおく。特に、$E'=\{e\}$のとき$G+e$と表わす。点集合Sを１点sに縮約(shrink)するとは、$V(G)-S$に点sを加え、更に$e=(u,v)\in E(G)$(但し、

$u \in S, v \notin S$)なる各辺eを辺(s,v)に置き換えることである。ｋ－辺連結グラフとは、任意の二点間に辺を共有しない道が少なくともｋ本あるグラフである。（強）連結成分とは、極大な（強）連結部分グラフのことを呼ぶ。ｋ－成分とは、任意の２点u,v間に辺を共有しない(u,v)-道が少なくともｋ本はある極大な点集合をいう。無向または有向グラフGのカット（関節点）とは、それを開放除去（除去）すると連結成分数、弱連結成分数が１以上増加するような辺集合（点）のことである。グラフGにおいて、関節点uとそれを除去することにより生成された一つの連結成分からなる点部分集合をｕ－ブロックといい、点vを含まないすべてのｕ－ブロックからなる点集合をW(u;v)と表わす。ｋ－カットとは、ｋ本の辺からなるカットのことである。S_1, S_2をGの異なるｋ－成分とし、Gのカット$K(|K|<k)$であるG-Kにおいて、S_1とS_2が異なる連結成分、弱連結成分に含まれるとき、KはS_1, S_2を分離するという。

$E(G)$	：	無向グラフG上の辺集合
$A(G)$	：	有向グラフG上の枝集合
$P_G(u,v)$	：	グラフGにおけるuからvへの道（Gが有向グラフのときは、有向道とともに弱連結道も考える）
$P_G\langle u,v\rangle$	：	グラフGにおけるuからvへの有向道
$M_G(u,v)$	：	Gにおいてu,v間の辺を共有しない道の最大数
$N_G(v)$	：	グラフGにおいてvと隣接している点集合
KG	：	V(G)の完全グラフ
$\alpha(S)$	：	G'の３－成分Sに対応するFの点
$\alpha(v)$	：	（但し、$v \in S$）
$\alpha(E)$	：	$(u,v) \in E$に対応する$(\alpha(u), \alpha(v))$（但し$\alpha(u) \neq \alpha(v)$）$\in KF$を要素とする枝集合
$\beta(v)$	：	vに相当するG上の点からなる３－成分

３．３－辺連結化問題のＮＰ－完全性

3-ECAにおいて、G_0を連結グラフに制限して定義されるC3-ECAに対し、次の定理を得る。（証明は文献[33]を参照のこと）

【定理１】C3-ECAは、ＮＰ－完全である。（3DM $\propto$ C3-ECA）

４．３－辺連結化問題の近似解法

４．１　アルゴリズムの概要

３－辺連結化近似アルゴリズムATEC(Algorithm for Triply Edge Connectivity)

Input. 完全無向グラフ$G=(V(G),E(G))$, $|V(G)| \geq 4$, コスト関数$c:E(G) \Rightarrow \mathbb{Z}^+$,
連結部分グラフ$G_0=(V(G_0),E(G_0))$（但し、$V(G_0)=V(G)$, $E(G_0) \subseteq E(G)$）
Output. $(V(G_0), E(G_0) \cup Z)$が３－辺連結となる辺集合$Z \subseteq E(G)-E(G_0)$

① BRC[1]（G_0を２－辺連結化する近似解Zを$O(|V(G)|^2)$時間で求める, $G' \Leftarrow G_0+Z$)

② FTC（G'上のすべての３－成分を求める）

③ FS (G'を3－辺連結化する近似解E"を求める, $Z \Leftarrow Z \cup E"$)
以下でFTCとFSについて述べる。ここで$n=|V(G)|$, $m=|E(G)|$とおく。

4．2　手続きFTC

Input. 2－辺連結部分グラフ$G'=(V(G'),E(G'))$
Output. 3－成分の集合C_3
1) $CG \Leftarrow G'$; $D_2 \Leftarrow \{v \in V(CG) \mid d_{CG}(v)=2\}$; $\forall v \in D_2$をCGから短絡除去する；
2) $D_3 \Leftarrow V(CG)-D_2$; $A \Leftarrow \phi$;
3) D_3が空になるまで、3.1)から3.4)の操作を繰り返す：
3.1) 深さ優先探索(depth-first search)を用いて、関節点，2－点連結成分,DFS-木 Tを求めると共に、以下の操作を行なう。
3.1.a) 2－点連結成分BC_iに対して、部分木$A(BC_i) \cap A(T)$の根(関節点)をvとする。点$u,w \in N_{CG}(v) \cap V(BC_i)$と枝$\langle v,u \rangle \in A(T)$に対して、①$|N_{CG}(v) \cap V(BC_i)|=2$のとき、$CG \Leftarrow CG-\{(v,u),(w,v)\}$; $CG \Leftarrow CG+(w,u)$; $L=\{(x,y) \mid \langle x,y \rangle \in \{P_T\langle u,w \rangle, \langle w,u \rangle\}\}$;② $|N_{CG}(v) \cap V(BC_i)| \geqq 3$のとき、$L=\{(x,y) \mid \langle x,y \rangle \in \{P_T\langle v,w \rangle, \langle w,v \rangle\}\}$; 閉路L(自己閉路を含まない)が存在すれば、①では$A \Leftarrow A \cup [L,u]$; ②では$A \Leftarrow A \cup [L,v]$; 存在しなければ、$D_3 \Leftarrow D_3-u$; $C_3 \Leftarrow C_3 \cup \{S\}$; $CG \Leftarrow CG-u$; (但し、Sはuに縮約された点集合)
3.1.b) vを根とするすべての$A(BC_i) \cap A(T)$の操作後、木の枝$\langle t,v \rangle$をバックトラックするとき、$|N_{CG}(v) \cap V(BC_j)|=2$ならば、$t,z \in N_{CG}(v) \cap BC_j(v)$, $(i \neq j)$に対して、$CG \Leftarrow CG-\{(t,v),(v,z)\}$; $CG \Leftarrow CG+(t,z)$; その後、$d_{CG}(v)=0$ならば、$D_3 \Leftarrow D_3-v$; $C_3 \Leftarrow C_3 \cup \{S\}$; (但し、Sはvに縮約された点集合)
3.2) Aから$[L,v]$を選び、深さ優先探索により、$CG-E(L)$においてvから到達できるV(L)上の点をすべて求め、その集合を$S_{CG}(v)$と置く。
3.3) $D_3 \Leftarrow D_3-S_{CG}(v)$; $S_{CG}(v)$を1点v_Sに縮約したグラフをCGと置く。ここで、$d_{CG}(v_S)=2$または$d_{CG}(v_S)=0$ならば$CG \Leftarrow CG-v_S$; $C_3 \Leftarrow C_3 \cup \{S\}$; そうでなければ、$D_3 \Leftarrow D_3-v_S$; (Sは、$v_S$に縮約された点集合)
3.4) $A \neq \phi$ならば、3.2)へ。そうでなければ、3.1)へ。

【補題１】点集合$S \subseteq V(G')$に対して、$S \in C_3$のための必要十分条件はSがG'の3－成分であることである。

【補題２】FTCは、G'のすべての3－成分を$O(n(n+m))$の計算時間で求める。

4．3　手続きFS

Input. 3－成分の集合C_3, 2－辺連結グラフG'
Output. $G"=(V(G),Z \cup E(G_\emptyset))$が3－辺連結となる辺集合Z
1) G'(図1,表1)の各3－成分を1点に縮約して定まるグラフをFと表す。V(F)上の完全グラフをKFとする。KF上のコストc'は、$c'(u,v)=\min[\{\infty\} \cup \{c(x,y) \mid (x,y) \in E(G)-E(G'), u=\alpha(x), v=\alpha(y) (u \neq v)\}]$、バックポインタbは、$b(u,v)=(x,y)$とする。

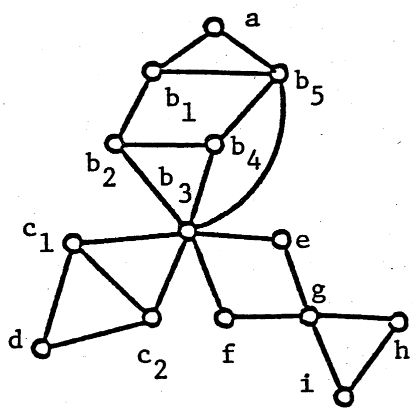


図1　２－辺連結グラフG'

表1　コスト関数c

	a	b1	b2	b3	b4	b5	c1	c2	d	e	f	g	h	i
a			65	4	8		55	2	1	6	5	42	2	5
b1				74	4		7	8	5	7	2	1	6	9
b2						10	4	5	11	5	11	9	41	8
b3									37	16	8	1	9	25
b4							3	8	63	27	5	14	2	33
b5							31	40	91	36	6	6	7	4
c1										8	7	44	14	83
c2										39	9	52	6	72
d										7	2	8	6	2
e											2		1	5
f													5	7
g														2
h														
i														

c(u,v)=c(v,u)

2) Fから更に多重辺を除いてグラフUを作る。

3) $d_F(r)=2$の点rを根とする(但し、Fが関節点wを含むときには、rは、ただ1つの関節点をもつ閉路C上の点とし、かつC上でrとwの距離が$\lceil |E(C)|/2 \rceil$なる点とする)。グラフUにおいて、rからの幅優先探索(breadth-first search)によって、U上の無向辺すべてを有向化したグラフをU'とする。$D_0=\{r\}$; $i \geqq 1$に対して、$D_i=\{v \in V(U) \mid u \in D_{i-1}, v \in D_j\ (j<i), (u,v) \in E(U)\}$を構成し。$A(U)=\{\langle u,v\rangle \mid u \in D_{i-1}, v \in D_i\ (i \geqq 1)\} \cup \{\langle u',v'\rangle \mid u',v' \in D_i\ (i \geqq 0), (u',v') \in E(U)\}$とする。

4) 手続きmodified DIST

$\forall (v,u) \in E(KF)$に対して、距離関数dをc'より定める。

① $d_F(v)=2$かつ$d_F(u) \geqq 3$のとき

$d(v,u) \Leftarrow \min\{c'(v,w) \mid w \in W(u;v)\}$;

$b'(v,u) \Leftarrow (v,w')$; (但し、$d(v,u)=c'(v,w')$)

② $d_F(v) \geqq 3$かつ$d_F(u) \geqq 3$のとき

$d(v,u) \Leftarrow \min\{c'(w,w') \mid w \in W(v;u), w' \in W(u;v)\}$;

$b'(v,u) \Leftarrow (v',u')$; (但し、$d(v,u)=c'(v',u')$)

③ $d_F(v)=2$かつ$d_F(u)=2$のとき

$d(v,u) \Leftarrow c'(v,u)$, $b'(v,u) \Leftarrow (v,u)$

5) Uの各閉路Cについて、$u,w \in N_C(v)$かつ$\langle u,v\rangle, \langle v,w\rangle \in A(U')$なるC上の点v $(\neq r)$に対して、$\langle u,v\rangle$を除去する。この操作により得るグラフをDとする。

6) $H \Leftarrow (V(F), \phi)$; $\forall (u,v) \in E(KF)-E(U)$に対し、$H \Leftarrow H+\{\langle u,v\rangle, \langle v,u\rangle\}$; $A(H') \Leftarrow \{\langle u,v\rangle \mid \langle v,u\rangle \in A(U')\} \cup A(D)$; $H \Leftarrow H+A(H')$; 距離関数d'は、

$(u,v) \in E(KF)-E(U)$に対して、　$d'\langle u,v\rangle=d'\langle v,u\rangle=d(u,v)$;

$\langle u,v\rangle \in A(H')$に対する$\langle v,u\rangle$に対して、　$d'\langle v,u\rangle=d(u,v)$;

$\langle u,v\rangle \in A(H')-A(D)$にに対して、　$d'\langle u,v\rangle=d(v,u)$;

$\langle u,v\rangle \in A(D)$に対して、　$d'\langle u,v\rangle=0$;

$\langle v, r\rangle \in A(H)$に対して、 $d'\langle v, r\rangle=\infty$; とする。

7) d'に関して、H上の(rを根とする)最小コスト有向木Tを求める(図2,表2)。

表2 距離関数d'

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a		1	1	1	6	5	2	2	5
b	∞		1	1	5	2	1	2	2
c	∞	0		1	7	2	2	6	2
d	∞	1	0		7	2	2	6	2
e	∞	0	7	7		2		1	5
f	∞	0	2	2	2			5	7
g	∞	1	2	2				2	2
h	∞	2	6	6	1	5	0		
i	∞	2	2	2	5	7	0		

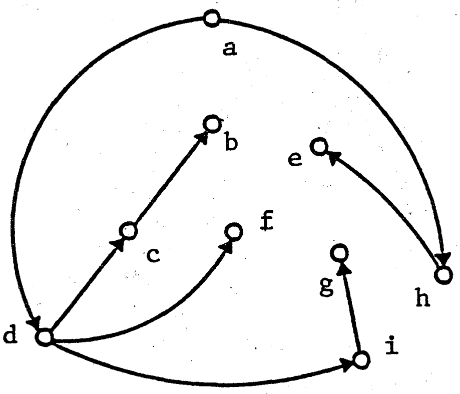


図2 最小コスト有向木T

8) Tの有向枝集合A(T)において、$\langle u, v\rangle \in A(T)-A(D)$をb(b'(u, v))によりG上の無向辺に変換した$E''(G'') \subseteq E(G)-E(G')$をZに加える。

FSの計算時間は$O(n^2(n+m))$である。図3にFSの説明図を示す。

【補題3】$|V(F)| \geq 5$のとき、H上で$\forall v \in V(H)-\{r\}$に対して、含まれる枝$\langle u, w\rangle$の$d'\langle u, w\rangle$の総和が有限である有向道$P_H(r, v)$が存在する。

【定理2】ATECは、$G''=(V(G), E(G_0) \cup Z)$が3-辺連結グラフとなる辺集合Zを$O(n^2(n+m))$の計算時間で生成する。

5. 近似解の評価

最適解を含む中間解$AW=A_1 \cup A_2 \cup A_3$(図4)を構成し、近似解と中間解の重みを比較する。Uの各閉路Cに対して、Cが関節点wを含むとき、$u, v \in N_C(w)$かつ$\langle u, w\rangle, \langle v, w\rangle \in A(U')$なる関節点wがただ1つ存在する。これをs(C)と表わす。また、点vを含む閉路をCvと表わす。

① $A_1 \Leftarrow \{\langle r, w\rangle \mid$ wは、Crが含むただ1つの関節点$\}$; $C \neq Cr$且つ関節点を2点以上含むFの各閉路Cに対し②を繰り返す。

② $A_1 \Leftarrow A_1 \cup \{\langle s(C), w\rangle \mid$ CはFの閉路、wは、C上のs(C)以外の関節点$\}$;

$E^*(G') \subseteq E(G)-E(G')$を$G'+E^*(G')$が3-辺連結となる最適解とする。$X^*=\{(u, v) \mid d_F(u)=d_F(v)=2,\ u, v \in V(C)$ (Cは長さ3以上の閉路$\}$とする。$Y^*=\alpha(E^*(G'))-X^*$とする。

③ $A_2 \Leftarrow \{\langle s(C), u\rangle, \langle s(C), v\rangle \mid (u, v) \in X^*,\ u, v \in V(C)\} \subseteq A(H)-A(D)$;

④ $A_3 \Leftarrow \{\langle u, v\rangle \mid (u, v) \in Y^*,\ d_F(u) \geq 3,\ d_F(v)=2\}$;

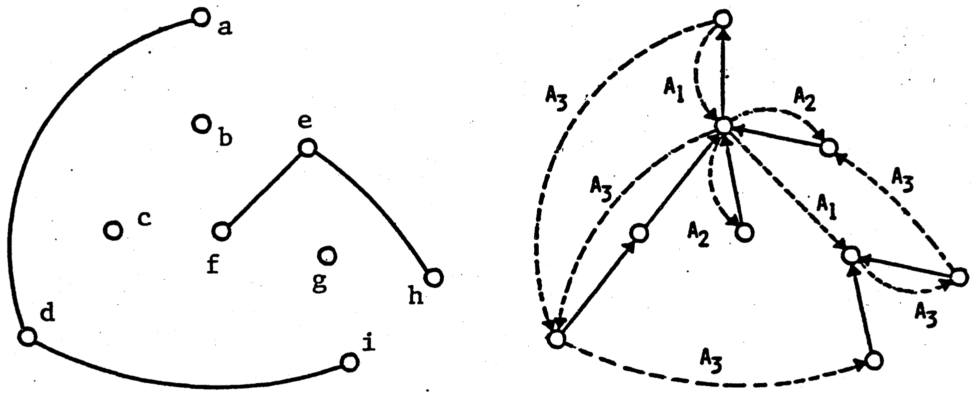
⑤ $A_3 \Leftarrow A_3 \cup \{\langle u, v\rangle \mid (u, v) \in Y^*,\ |P_U(r, v)| \leq |P_U(r, u)|,\ d_F(u) \geq 3,\ d_F(v) \geq 3\}-A_1$;

$d_F(u)=d_F(v)=2$且つ$Cv \neq Cu$を満たす$(u, v) \in Y^*$に対して、⑥⑦⑧を行なう。

⑥ $A_3 \Leftarrow A_3 \cup \{\langle u, v\rangle \mid \exists P_U \cdot \langle v, u\rangle,\ d_U(u)=d_U(v)=1\}$;

⑦ $A_3 \Leftarrow A_3 \cup \{\langle s(Cv), v\rangle, \langle v, u\rangle \mid \exists P_U \cdot \langle v, u\rangle,\ d_U(u) \neq 1, d_U(v) \neq 1\}$;

⑧ $A_3 \Leftarrow A_3 \cup \{\langle w,v\rangle, \langle v,u\rangle \mid \nexists P_U\cdot\langle v,u\rangle, \nexists P_U\cdot\langle u,v\rangle$(但し、点$w$は $\exists P_U\cdot\langle u,w\rangle, \exists P_U\cdot\langle v,w\rangle$を満たす$P_U(u,v)$上の関節点)$\}$;



(a)最適解　　　　(b)中間解

図4 中間解の構成

定義から、$A_3 \subseteq A(H)$。⑦⑧において、A_3に加えられた$\langle s(Cv),v\rangle, \langle w,v\rangle$に関しては、dの定義より、

$$d(s(Cv),v) \leqq d(u,v)=c'(u,v),\quad d(w,v) \leqq d(u,v)=c'(u,v).$$

従って、
$$d(A_3)=\sum_{\langle u,v\rangle \in A_3} d(u,v) \leqq 2c'(Y^*).$$

【補題4】rを根とする$A(T') \subseteq A(D) \cup AW$なる有向木$T'$を含む枝集合$AW \subseteq A(H)-A(D)$が存在する。

【補題5】FSによってG'を３－辺連結化する近似解を$E''(G')$とする。このとき、
$$c(E''(G')) \leqq 2c(Y^*)+c(A_1)+c(A_2)$$

補題４，５より、次の定理３をうる。

【定理３】 $c(E''(G')) \leqq 2c(E^*(G'))+\delta$.(但し、$c(E''(G'))$及び$\delta$はそれぞれ$G'$によって定まる最適解のコスト及び部分木のコストである)

6. あとがき

本稿では、コスト総和の最小の辺集合の付加によって、グラフ全体を３－辺連結化する問題に対する近似アルゴリズムを提案した。今後の課題としては、本問題の一般化である点部分集合に対する２または３－辺連結化問題に対する近似解法の設計が考えられる。

文　献

[1] A.V.Aho, J.E.Hopcroft and J.D.Ullman, "The Design and Analysis of Computer Algorithms", Addison-Wesley, Reading, MA, (1974).
[2] B.Bollobas,"Extremal Graph Theory",Academic Press,London,(1978).
[3] K.P.Eswaran and R.E.Tarjan,Augmentation problems,SIAM J.Comput., 5(1976), pp.653-655.
[4] S.Even, "Graph Algorithms", Pitman, London, (1979).
[5] H.Frank and W.Chou, Connectivity considerations in the design of survivable networks, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-17(1970),pp.

486-490.
[6] G.N.Frederickson and J.Ja'Ja', Approximation algorithms for several graph augmentation problems, SIAM J.Comput., 10(1981), pp.270-283.
[7] M.R.Garey and D.S.Johnson, "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness", Freeman, San Francisco, (1978).
[8] D.Gusfield, Optimal mixed graph augmentation, SIAM J.Comput., 16 (1987), pp.599-612.
[9] F.Harary, "Graph Theory", Addison-Wesley, Reading, MA, (1969).
[10] J.E.Hopcroft and R.E.Tarjan, Dividing a graph into triconnected components, SIAM J.Comput., 2(1973), pp.135-158.
[11] T.C.Hu, "Integer Programming and Network Flows", Addison-Wesley, Reading, MA, (1969).
[12] Y.Kajitani and S.Ueno, The minimum augmentation of directed tree to a k-edge-connected directed graph, Networks, 16(1986), pp. 181-197.
[13] 梶谷, 上野, 中田, 最小数枝付加によるｋ－枝連結グラフの(ｋ＋１)－枝連結グラフへの拡大構成, 京都大学数理解析研究所講究録, 534(グラフ理論とその応用), (August 1984), pp.206-220.
[14] W.Mader, A reduction method for edge-connectivity in graphs, in: B.Bollobas,ed., "Advances in Graph Theory",North-Holland,Amsterdam,(1978), pp.145-164.
[15] V.M.Malhotra, M.P.Kumar and S.N.Maheshwari, An $O(|V|^3)$ algorithm for finding maximum flows in networks, Information Processing Letters, 7(1978), pp.277-278.
[16] T.Masuzawa, K.Hagihara, K.Wada and N.Tokura,The k-node-connectivity augmentation problem for directed binary trees, IECE Japan Trans., (D)J67-D, 1(1984), pp.77-84. (Japanese)
[17] T.Masuzawa, K.Hagihara and N.Tokura, An optimal time algorithm for the k-vertex-connectivity unweighted augmentation problem for the rooted directed trees, Discrete Applied Math., 7(1987), pp.67-105.
[18] 小野口, 千葉, 西関, 平面グラフの２連結化アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録, 534(グラフ理論とその応用), (August 1984), pp.221-233.
[19] A.Rosenthal and A.Goldner, Smallest augmentations to biconnect a Graph, SIAM J. Comput., 6(1977), pp.55-66.
[20] 高橋, ネットワークモデルに関する基礎的研究, 広島大学大学院 工学研究科 修士論文, (1985-03).
[21] R.E.Tarjan, Finding optimum branchings,Networks,7(1977),pp25-35.
[22] S.Ueno, Y.Kajitani and H.Wada, The minimum augmentation of trees to k-edge-connected graphs, IECE Japan, Technical Research Reports, IN83-6(1983-05), pp.1-6. (Japanese)
[23] T.Watanabe and A.Nakamura, Vertex-connectivity augmentation problems,IECE Japan,Technical Research Reports AL81-26(1981-07), pp.1-8. (Japanese)
[24] T.Watanabe and A.Nakamura, On a smallest augmentation to triconnect a graph,Department of Applied Math.,Faculty of Engineering, Hiroshima Univ.,Higashi-Hiroshima,Japan, Technical Report C-18, (1983).
[25] T.Watanebe, A.Nakamura and M.Takahashi, Augmentation problem for a vertex subset of a graph,IECE Japan,Technical Research Reports AL83-89(1984-03), pp.107-114. (Japanese)
[26] T.Watanabe and A.Nakamura, K-edge connectivity augmentation problem IECE Japan, Technical Research Reports AL83-90(1984-03), pp.115-122. (Japanese)
[27] T.Watanabe and A.Nakamura, On a smallest augmentation to k-edge-

connect a graph, Department of Applied Math., Faculty of Engineering, Hiroshima Univ., Higashi-Hiroshima, Japan, Technical Report C-20, (1984).
[28] 渡辺, 中村, 辺の付加によるグラフの拡大構成問題, 京都大学数理解析研究所講究録, 534(グラフ理論とその応用), (August 1984), pp.197-205.
[29] T.Watanabe and A.Nakamura, Edge-connectivity augmentation problems, J.Comput. and System Sci., 35(1987), pp.96-144.
[30] T.Watanabe, An efficient way for edge-connectivity augmentation, Coordinated Science Lab., University of Illinois at Urbana, Urbana, IL 61801 U.S.A. Technical Report ACT-76-UILU-ENG-87-2221, (1987-04).
[31] 渡辺, 中村, 成田, 通信回線の付加による耐故障ネットワークの構成, 昭和62年度電気四学会中国支部第38回連合大会, (1987), p.67.
[32] T.Watanabe, A simple improvement on edge-connectivity augmentation, IEICE Japan, Technical Research Reports CAS87-203(1987-12), pp.43-48.
[33] 渡辺, 中村, 成田, 通信回線の付加による耐故障ネットワークの構成, IEICE Japan, Technical Research Reports CAS87-199(1987-12), pp19-24.

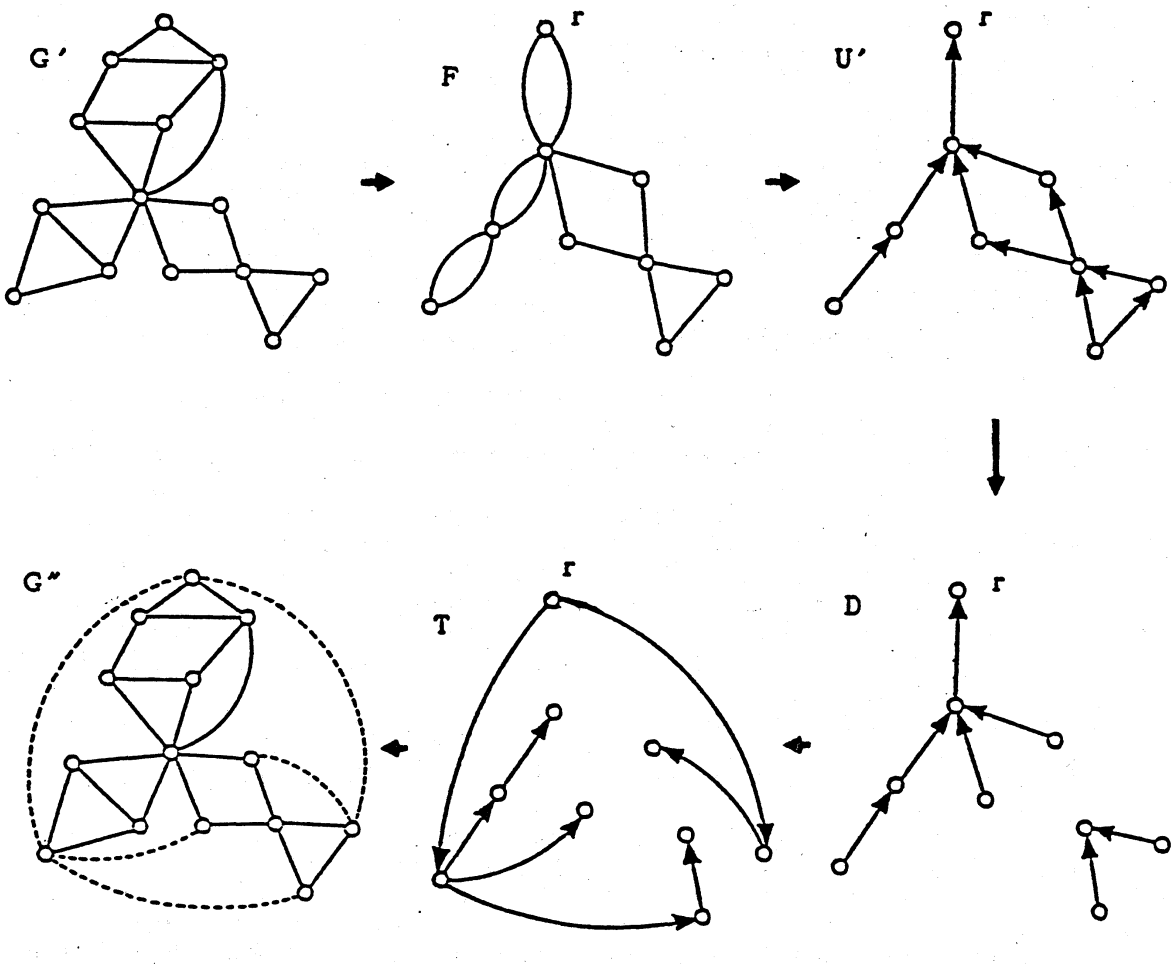


図3 FSの説明